

正交信号幅度的快速近似计算方法

何文涛¹, 徐建华², 叶甜春¹

(1 中国科学院 微电子研究所, 北京 100029; 2 杭州中科微电子有限公司, 浙江 杭州 310053)

摘 要: 用于 FFT 频谱分析和数字正交解调中的正交信号处理技术, 一般都需要快速地计算一对正交信号的幅度。目前广泛采用的是基于 $A = aX + bY$ 模型的一线近似算法, 该算法的优点是计算简单, 速度快, 但是会有 10% 左右的误差。由此提出了一种三线近似算法, 在计算复杂度没有明显提高的情况下, 计算误差小于 1%。

关键词: 正交信号; 幅度近似; 三线近似算法

中图分类号: TN401

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2010)11-0030-03

Fast Magnitude Approximation for Quadrature Signal

HE Wen-tao¹, XU Jian-hua², YE Tian-chun¹

(1 Institute of Microelectronics of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China;

2 Hangzhou Zhongke Microelectronics Co., Ltd, Hangzhou 310053, China)

Abstract: Quadrature signal processing used in FFT spectrum analysis and digital quadrature demodulation requires computing the magnitude of the quadrature signal pairs. One-line approximation based on $A = aX + bY$ model is widely used. It is easy and fast. But the computation error is up to about 10%. The paper presents three-line approximation method. The computation error is reduced to less than 1% without increasing the computational complexity.

Key words: quadrature signal; magnitude approximation; three-line approximation

1 引言

用于 FFT 频谱分析^[1]和数字正交解调^[2]中的正交处理技术, 一般都需要快速地计算一对正交信号的幅度。比如计算傅里叶变换结果的幅度, 数字接收机中估计解调信号的包络等。在这些应用中, 都要求快速并且精确地计算出正交信号的幅度 $A = \sqrt{I^2 + Q^2}$ (I 和 Q 分别是同相分量和正交分量)。如果直接计算, 需要两次平方运算和一次开方运算, 另外 I^2 和 Q^2 的字长是 I 和 Q 的两倍。为了简化计算, 目前普遍采用线性近似算法 $A = aX + bY$, 其中 $X = \max(|I|, |Q|)$, $Y = \min(|I|, |Q|)$, a 和 b 是正的系数, 并且 $a > b$ 。Robertson 最早提出近似算法 $A = X + 0.5Y$ ^[3], 该算法广泛应用于各种数字接收机中^[4]。这种方法只需要一次比较, 一次移

位和一次加法运算, 但是计算精度不高。后来, 一些数字设备中改进了该算法, 把系数 0.5 改为 0.375 来提高计算精度^[5]。这些算法只采用了一组固定的系数 a 和 b , 称为一线近似算法, 其计算精度受 X 和 Y 比值的影响比较大; 二线近似算法^[6]采用了两组系数, 根据 X 和 Y 的比值选择其中一组系数, 从而提高了计算精度。本文提出了一种三线近似算法来计算正交信号的幅度, 并对各个算法的性能进行了比较。

2 算法推导

把 $A = \sqrt{I^2 + Q^2}$ 线性近似为 $A = aX + bY$, 其中 $X = \max(|I|, |Q|)$, $Y = \min(|I|, |Q|)$ 。因为 I 和 Q 是正交的, 所以可以定义:

收稿日期: 2009-09-30; 修回日期: 2009-11-30

基金项目: 国家高技术研究发展“八六三”计划基金项目(2007AA12Z344)

$$\begin{cases} X = M \cdot \cos(\theta) \\ Y = M \cdot \sin(\theta) \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 45^\circ$$

因此幅度可以表示为

$$A = M \cdot [a \cos(\theta) + b \sin(\theta)] \tag{1}$$

式(1)表示的幅度计算的理想曲线是一条值为 M 的直线,我们把这条理想曲线作为衡量各种近似算法性能的标准.近似计算结果的相对误差定义为

$$e(\theta) = \frac{A - M}{M} = a \cos(\theta) + b \sin(\theta) - 1 \tag{2}$$

对于区间 $0 \leq \theta \leq 45^\circ$,我们来分析相对误差 $e(\theta)$ 的特性, $e(\theta)$ 的一阶导数和二阶导数分别为

$$e'(\theta) = -a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \tag{3}$$

$$e''(\theta) = -a \cos(\theta) - b \sin(\theta) \tag{4}$$

令 $e'(\theta_0) = 0$,那么 $\theta_0 = \arctan(\frac{b}{a})$, $e(\theta_0) = \sqrt{a^2 + b^2} - 1$.因为系数 a 和 b 都是正数,所以 $e''(\theta) < 0$,因此 $e(\theta)$ 是凸形曲线,拐点为 $(\theta_0, e(\theta_0))$,如图 1 的实线所示.

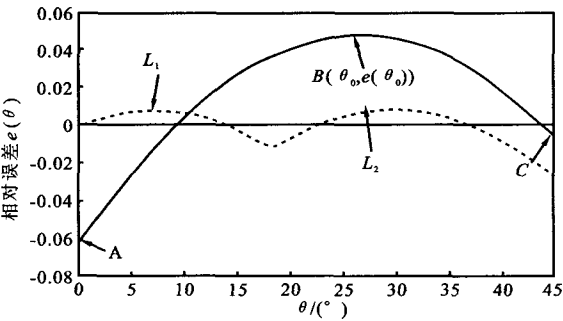


图 1 相对误差 $e(\theta)$ 的曲线

在区间 $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $e'(\theta) > 0$, $e(\theta)$ 单调递增;在区间 $\theta_0 \leq \theta \leq 45^\circ$, $e'(\theta) < 0$, $e(\theta)$ 单调递减.所以相对误差曲线有 3 个极值点,分别是 $A(0, e(0))$, $B(\theta_0, e(\theta_0))$, $C(45^\circ, e(45^\circ))$.相对误差极值分别是

$$e(0) = a - 1 \tag{5}$$

$$e(\theta_0) = \sqrt{a^2 + b^2} - 1 \tag{6}$$

$$e(45^\circ) = \frac{(a + b)}{\sqrt{2}} - 1 \tag{7}$$

为了减小幅度的相对误差,要求选择合适系数 a 和 b ,尽量保证 3 个极值都比较小.但是在整个区间内,很难同时减小 3 个极值.如图 1 中的实线所示,在整个区间内, a 和 b 都是固定的,只有一条连续的相对误差曲线,因此称为一线近似算法,C 点的极值比较小,而 A 点的极值比较大.可以通过把区间 $0^\circ \sim 45^\circ$ 划分为多个子区间,如图 1 中的虚线所示,区间 $0^\circ \sim 45^\circ$ 被划分成两个子区间,每个子区间

都有各自的系数 a 和 b ,分别有一个相对误差曲线 L_1 和 L_2 ,因此称为二线近似算法.可以看出, L_1 和 L_2 在各自的子区间内误差比较小,在别的子区间内误差比较大,合并起来后,与一线近似算法相比,在整个区间内,误差明显减小.

因此,把区间分成多个子区间,采用多线近似算法,可以提高幅度近似计算的精度.下面具体分析一线近似,二线近似和三线近似算法.

3 算法分析

3.1 一线近似法

一线近似算法比较简单,在整个区间内系数 a 和 b 是固定的.几种常用的一线近似算法以及性能如表 1 所示^[7].

表 1 一线近似算法对比

系数 a	系数 b	最大误差 /%	误差标准差 /%
1	1/2	11.8	3.09
1	1/4	- 11.6	4.12
1	3/8	6.8	2.56
7/8	7/16	- 12.5	2.71
15/16	15/32	- 6.25	2.91

可以看出,系数 a 和 b 可以用 2 的整数次幂的倒数表示,因此乘法运算可以用简单的移位运算替代.其中 $a = 1, b = 1/2$ 算法最简单,适合于对精度要求不高的应用;相比而言, $a = 1, b = 3/8$ 算法误差减小了一半,代价是增加了一次移位和一次加法运算. $a = 15/16, b = 15/32$ 算法误差最小,但是增加了移位和加法运算.

3.2 多线近似算法

从图 2 可以看出,正如理论推导,所有误差曲线都是类似的凸型曲线.对于不同的系数 a 和 b ,误差曲线的顶点的坐标不同,顶点左边的曲线是单调递

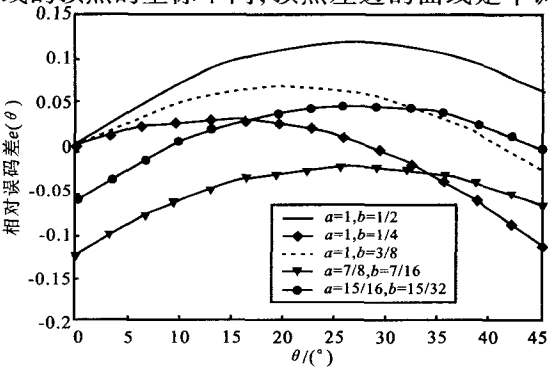


图 2 常用一线近似算法相对误差对比

增的,右边的曲线是单调递减的.比较图 2 中的各个算法,系数 $a = 1, b = 1/4$ 对应的误差曲线在相位角偏小时误差较小,但是在相位角偏大时,误差显著增大,所以该算法适合于正交信号的两个分量差别比较大的情况;系数 $a = 15/16, b = 15/32$ 对应的误差曲线在相位角偏大时误差较小,但是在相位角偏小时,误差显著增大,所以该算法适合于正交信号的两个分量比较接近的情况.

这些算法都不能在整个区间内获得较小的计算误差.因此,可以把整个区间划分为多个子区间,每个子区间采用不同的算法系数,使得各个子区间的计算误差最优,以到达减小整个区间的计算误差的目的.一般而言,划分的子区间越多,近似计算的误差就越小,但是计算复杂性也随之增加,计算量与子区间数目近似成正比关系.

与一线近似算法相比,二线近似算法的误差更小,二线近似算法的系数如表 2 所示^[8].

表 2 二线近似算法系数

分界点 θ_0	$\text{Atan}(1/3)$	
区间 1	系数 a	1
	系数 b	1/8
区间 2	系数 a	7/8
	系数 b	1/2

二线近似算法是目前采用较多的一种.但是对于有些应用,比如卫星导航接收机中的码跟踪环路,需要快速且精确地计算出正交信号的幅度,可以采用三线近似算法.三线近似算法的系数如表 3 所示.

表 3 三线近似法的系数列表

分界点 θ_0	$\text{Atan}(1/4)$	
分界点 θ_1	$\text{Atan}(5/8)$	
区间 1	系数 a	1
	系数 b	1/8
区间 2	系数 a	15/16
	系数 b	3/8
区间 3	系数 a	25/32
	系数 b	5/8

3.3 性能比较

由于这些近似算法中的乘法运算全部用移位和加法运算代替,所以计算速度很快,如果采用硬件来实现,一线近似可以在单个时钟周期内完成.相比而言,二线近似算法的计算量约为一线近似的二倍,三

线近似算法的计算量约为一线近似的三倍.如果采用软件实现这些算法,三线近似算法的计算时间约为一线近似的三倍;如果采用硬件实现这些算法,可以提高计算并行度,用面积换取速度.总体而言,在目前的芯片设计中,相比于一线近似算法,三线近似算法在芯片面积和计算速度方面的劣势可以忽略不计.因此,近似算法的精度是决定因素,表 4 和图 3 比较了各种算法的计算性能.

表 4 各种近似算法的性能比较

近似算法	系数	最大 误差 / %	误差 标准差 / %
一线近似	$a = 1, b = 1/4$	- 11.6	4.12
一线近似	$a = 15/16, b = 15/32$	- 6.25	2.91
二线近似	同表 2	- 2.27	0.82
三线近似	同表 3	0.97	0.44

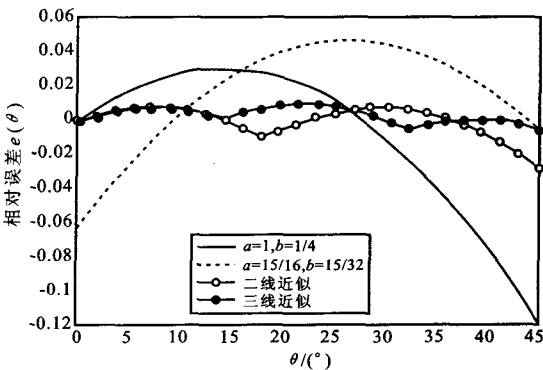


图 3 各种近似算法的性能比较

从比较结果中可以看出,一线近似算法虽然计算简单,但是误差比较大.相比而言,二线近似和三线近似的误差显著减小,三线近似算法的误差不到 1%.

4 结束语

基于 $A = aX + bY$ 模型的正交信号幅度的近似计算方法具有简单快速的优点.相比于一线近似算法,二线近似和三线近似算法的计算误差显著减小,而计算复杂性没有明显增加.本文提出的三线近似算法的计算误差小于 1%,可以用于数字通信等各个方面.

参考文献:

[1] 汪宿梁,毛志刚. 基于 GPS 预捕获的算法研究及硬件实现[J]. 微电子学与计算机,2009,26(6):105-108.

(下转第 36 页)

- networks[J]. IEEE Wireless Communications, 2004, 11(6):54-61.
- [2] Ye Mao, Li Chengfa, Chen Guihai, et al. EECS: An energy efficient clustering scheme in wireless sensor networks [C]// Proc. of the IEEE Int'l Performance Computing and Communications Conf. New York: IEEE Press, 2005:535-540.
- [3] 朱子健,赵广社,苏丽芳,等. WSN 非对称集中式能量有效路由算法[J]. 计算机工程, 2009, 35(3):155-157.
- [4] 姚仲欢,王高才,孙野,等. 传感器网络中基于最短路径树的低延时节能路由算法[J]. 微电子学与计算机, 2007, 24(9):174-177.
- [5] 殷新春,徐力杰. WSN 中一种基于数据融合的能量高效分簇路由协议[J]. 微电子学与计算机, 2007, 24(9):116-119.
- [6] Heinzelman W R, Chandrakasan A, Balakrishnan H. An application-specific protocol architecture for wireless micro sensor networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2002, 1(4):660-669.
- [7] Xian XD, Shi WR, He H. Comparison of OMNET++ and other simulator for WSN simulation[J]. IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, 2008:1439-1443.

作者简介:

胡荣女, (1985-), 硕士研究生. 研究方向为计算机网络.

杨春男, (1970-), 博士, 教授. 研究方向为信息安全、分布式计算、并行计算.

何军男, (1970-), 博士, 副教授. 研究方向为无线网络、分布式计算.

李奇 高级工程师.

(上接第 32 页)

- [2] 张兵,汤清华. 基于 DSP 的数字正交解调器的设计与实现[J]. 微电子学与计算机, 2009, 26(7):32-35.
- [3] Robertson G H. A fast amplitude approximation for quadrature pairs[J]. The Bell System Technical Journal, 1971(50):2849-2852.
- [4] Charles Abraham. Method and apparatus for performing signal correlation[P]. US Patent, US6891880, 2005.
- [5] Intersil Corp. HSP50110 digital quadrature tuner data sheet[P]. File Number 3651.6, 2001.
- [6] Adams W, Brady J. Magnitude approximation for micro-processor implementation[J]. IEEE Micro, 1983, 3(5):27-31.
- [7] Richard G L. Understanding digital signal processing[M]. 2nd ed. NJ: Prentice-Hall, 2004:481-482.
- [8] Levitt B K, Morris G A. An improved digital algorithm for fast amplitude approximation of quadrature pairs[R]. The Deep Space Network Progress Report, DSN PR 42-40, 1977:97-101.

作者简介:

何文涛男, (1982-), 博士研究生. 研究方向为卫星导航接收机信号处理算法、超大规模集成电路设计.

徐建华男, (1963-), 博士生导师. 研究方向为嵌入式软件、无线通讯系统、定位系统及算法.

叶甜春男, (1965-), 博士生导师. 研究方向为集成电路设计与应用、纳米加工与制造技术、新型器件.